



TITLE:

川の蛇行 網状転移 (複雑流体の数 理II)

AUTHOR(S):

柳田, 達雄; 西森, 拓; 小西, 哲郎

CITATION:

柳田, 達雄 ...[et al]. 川の蛇行 網状転移 (複雑流体の数理II). 数理解析研究
所講究録 2001, 1184: 30-40

ISSUE DATE:

2001-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/64617>

RIGHT:

川の蛇行 網状転移

北海道大学 電子研	柳田達雄	Tatsuo Yanagita	Hokkaido Univ.
大阪府立大 工学部	西森 拓	Hiraku Nishimori	Osaka Pref. Univ.
名古屋大学 理学部	小西哲郎	Tetsuro Konishi	Nagoya Univ.

1 はじめに

河川は流量や川底の土砂特性の変化に伴い直線流、屈曲流、蛇行流、扇状流など多様な流れの形態を持っている(図 1、図 2)^{1,2}。これらの形態がどのような環境下で形成され、どのような条件で形態変化が起こるかは明らかになっていない。

川の形態は流れにより川岸/川底が削られ、その土砂が浮遊/堆積し流れにフィードバックされる過程によって自発的に自己境界が形成される。また、蛇行流はガラス板上の流れ、氷河上の流れ、黒潮などと普遍的に見られるが、スケール、素過程(氷河上の流れには堆積がなく、ガラス板上と黒潮の蛇行には侵食/堆積がない)とも異なった現象間での蛇行発生のメカニズムの関係性という点においても興味深い。

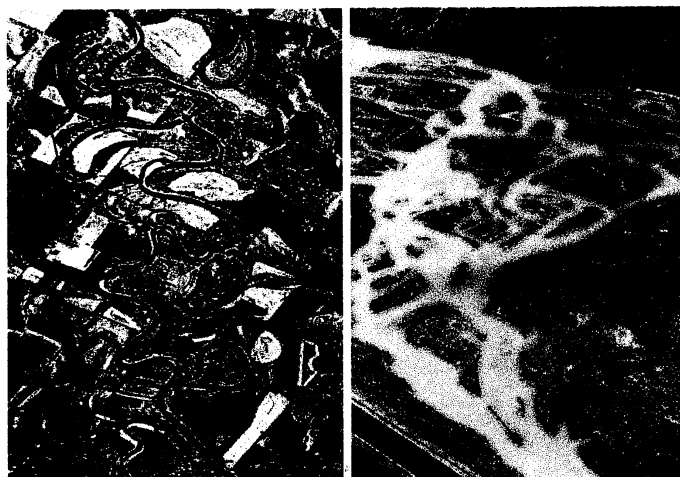


図 1: 川の流れ様式

河川の流れ様式で典型的な蛇行(左図)と網状流(右図)。これらの形態は流量、傾斜角、土砂の性質などにより決定されることがわかっているが、形成のメカニズムは明らかになっていない。

川の形態は流れによる侵食堆積とそれによる流れへのフィードバックにより形成され、境界が時間的に変動するため、3次元流体方程式を用いた直接的なシミュレーションは難しい。

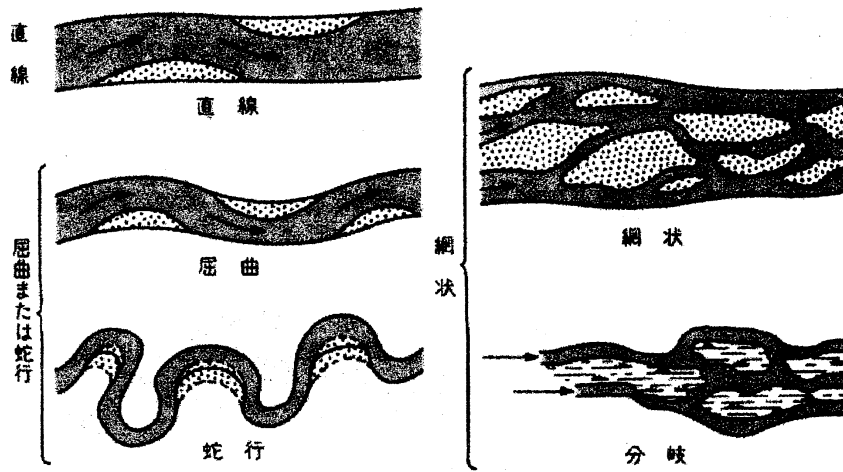


図 2・22 流路の平衡形 (Miall, A. D.: *Canad. Soc. Petrol. Geol.*, 1977)

図 2: 河川の形態相図

川の流れ形態は流量、流速、土砂流径などにより多種多様な様相を持っている。典型的ないくつかの様相の模式図を示した¹。流速が遅い場合は直線流、速くなると蛇行する事が知られている。

しかも、その時空間スケールのため十分な観察・実験も困難である。このような系の理解には数理モデル化とシミュレーションによる解析が有効なアプローチとなる。

川の運動の数理モデルによる研究は

- 2次元流体モデルに基づく線形解析³⁻⁵
- 曲率のダイナミクス^{6,7}
- セルオートマトン(CA)⁸

を用いる方法などのいくつかの試みがなされているが、それぞれ直線流の不安定化の解析、蛇行ダイナミクス、網状流のモデルとして個別に扱われており、形態変化まで扱っておらずどのような要因で多様な形態が形成されるかという問いの解明には至っていない。

2 モデル

河川はその境界が動的に変動するため、流れを3次元の流体方程式を用いた解析は困難である。また、流体方程式を精密に解く一方、侵食・堆積の動力学は現象論的方程式を用いざるえないため、モデルとしてのバランスが悪い。

ここでは、Hansen ら^{3,4} にもとづいて流体運動を2次元流で表し、簡略化した侵食／堆積のダイナミクスを導入して数理モデル化しシミュレーションによる形態遷移の主要因の解明をこころみる。

場の変数として流体の運動を深さ (鉛直) 方向に平均化した2次元速度場 $\vec{v}(x, y, t)$ 、水深 $h(x, y, t)$ 、川底高 $H(x, y, t)$ 、単位体積中に含まれる浮遊土砂量 $m(x, y, t)$ を選び以下のように川のダイナミクスをモデル化した (図 3)。

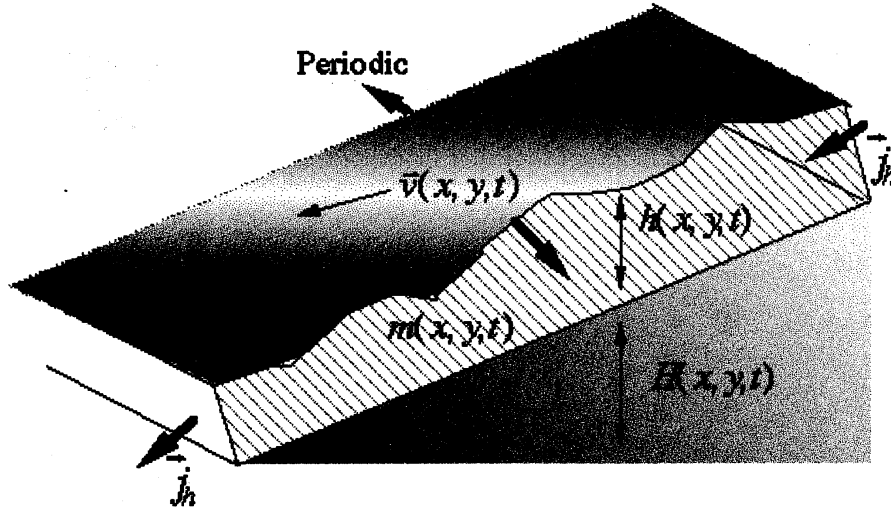


図 3: モデル

初期勾配方向を x 軸として、流体の運動を深さ (鉛直) 方向に平均化した2次元速度場 $\vec{v}(x, y, t)$ で表し、水深 $h(x, y, t)$ 、川底高 $H(x, y, t)$ 、単位体積中に含まれる浮遊土砂量 $m(x, y, t)$ を変数としたモデル化を行う。

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} - \vec{F}_{fric} \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j} \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}_b + M_{\downarrow} - M_{\uparrow} + D_H \nabla \cdot (h \nabla H) \quad (3)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}_s - M_{\downarrow} + M_{\uparrow} + D_m \nabla \cdot (h \nabla \frac{m}{h + \epsilon}) \quad (4)$$

ここで、 $\vec{j} = h\vec{v}$ は流束密度、 \vec{j}_b は川底を移動する土砂 (Bed load でここでは恒等的に 0 とした)、 $\vec{j}_s = m\vec{v}$ は浮遊土砂流束密度 (Suspension load)、 \vec{F}_{fric} は川底から流体が受ける摩擦力、 M_{\downarrow} は単位時間での堆積量、 M_{\uparrow} は単位時間での侵食量である。

侵食・堆積のダイナミクス M_d, M_t は土砂の粒径などの性質により異なるが、ここでは簡略化し堆積は土砂密度に比例し、侵食量は流量に比例するとした。

$$M_d = \alpha m / (h + \epsilon) \quad (5)$$

$$M_t = \beta |h\vec{v}| \quad (6)$$

$$(7)$$

もちろん、これらの現象論的方程式が形態にどのような影響をおよぼすかという点も我々の興味であると同時に、これらミクロなダイナミクスによらない普遍的構造も明らかにして行かなければならない。

川底から流体が受ける摩擦力 (Bed stress) は水深に反比例するとした。

$$\vec{F}_{fric} = k\vec{v} / (h + \epsilon)$$

ここで、川 ($h > 0$) と陸 ($h = 0$) を同時に数値的に取り扱うためのパラメータ ϵ を導入してある。また、圧力は動圧の効果を見捨て、静圧を水面高の関数 $p \sim H + h$ と仮定した。さらに、式 (3)(4) の拡散項は、それぞれ浮遊土砂が 3 次元的流れやミクロなスケールの渦などにより拡散する過程と川底での凹凸の崩落過程を表している。

このモデルは水深 h を ρ と読み替えると方程式は 2 次元圧縮性流体の方程式に類似した形であることがわかる。さらに、水量のある場所 (川 $h > 0$) とそれ以外を数値的に安定に解くため、(1) 食い違い格子 (2) 風上差分 (3) h に対して下駄 ϵ を履かせ (4) Fehlberg 数値積分により時間刻みを変化させるアルゴリズムを用いてシミュレーションを行った。周期的境界条件を課し、総水量 $\iint h(x, y) dx dy$ 総土砂量 $\iint \{H(x, y) + m(x, y)\} dx dy$ は保存量である。パラメータは主に $k = 0.01, \alpha = 0.01, \beta = 0.01, \epsilon = 0.01, \nu = 0.0, j_b = 0$ として初期勾配のに対する流れ様式の変化について述べる。

3 シミュレーション

3.1 蛇行の形成

初期状態として一定の地盤勾配を持つ直線流から始めるとある臨界勾配以下では直線流は安定であるが、それ以上では不安定化し蛇行流が形成される。蛇行流形成の初期過程では直線流にあるモードの不安定化が生じ交互砂州が形成される。その後、交互砂州間を流れる複数の流路から一つの流路が選択され蛇行流となる。このように交互砂州の形成から直線流が蛇行流へと移行する過程は実験流路においても見い出され (図 5) シミュレーション結果 (図 4) と定性的に一致する。

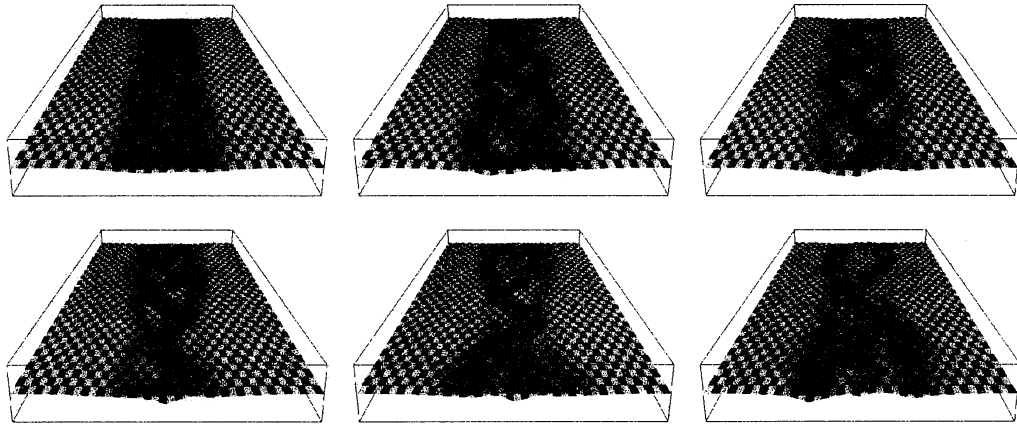


図 4: 蛇行形成の初期時間発展

蛇行形成初期の時間変化。時間は上段の左から右へと発展する。初期状態 $t = 0$ で直線流から時間発展をはじめると、直線流にあるモードが励起され多数の交互砂州が形成せられ複数の流路を持つ(上段中)。その後、それらの流路の中から次第に主流路が選択され蛇行が形成される。この蛇行形成初期の流路選択過程は実験流路での観測と一致する(図 5)。傾斜角 $\partial H(x, y)/\partial x = 0.01$



図 5: 実験流路における蛇行形成

実験流路における蛇行流の形成過程。直線流が不安定化し交互砂州が形成(左図)された後に、主流路が選択され蛇行流が形成(右図)される。

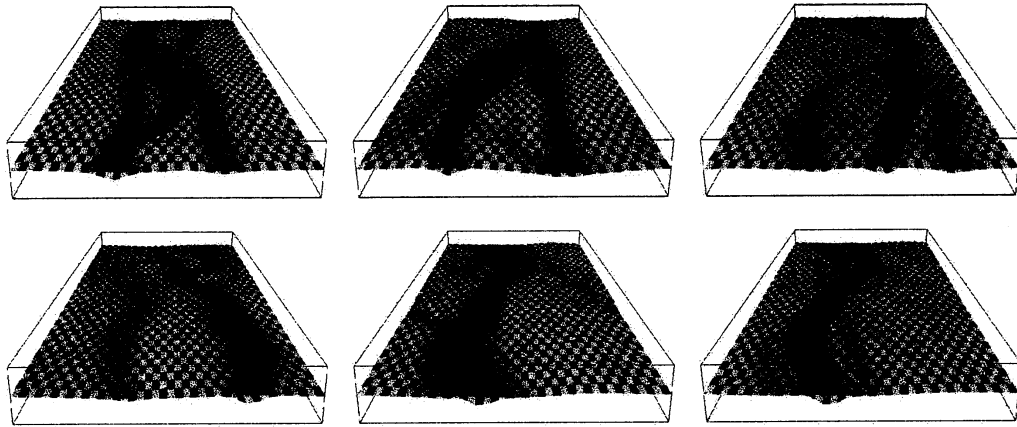


図 6: 蛇行形成の後期過程

複数の流路から次第に主流路が選択され蛇行が形成される過程。時間は上段の左から右へと発展する。この場合、形成される蛇行流路は安定ではなく流れの分岐 (ショートカット) を非周期的に繰り返す。

最終的に形成された蛇行流はパラメータにより (1) 空間周期的に蛇行し、蛇行点は時間とともに定常的に下流へ動く (2) 空間的に非周期的に蛇行し、蛇行点は時間的に不規則に変動 (3) 空間的に非周期的に蛇行し不規則なショートカットが生じるという運動を示す。このカオス的な「よろめき」運動は実際の河川でも観察されており⁹、また、最近になり実験系においても見出されている¹⁰。

3.2 形態変化

傾斜角度の増加にともない流れ様式が変化することが知られている (図 7)²。シミュレーションにおいても、初期勾配の増加にともない、直線流、安定蛇行流、カオティック蛇行流を経て、ショートカットが生じることにより網状化する (図 8)。この形態変化を以下の量で特徴づけを行う。

● 表面積

$$S = \int \int \Theta(h(x, y) - \epsilon) dx dy \quad (8)$$

● 平均流量

$$J = \int \int \frac{|h(x, y) \vec{v}|}{S} dx dy \quad (9)$$

● 川幅／水深比

$$R = \frac{\int \int \Theta(h(x, y) - \epsilon) dx dy}{\int h(x, y) dx} \quad (10)$$

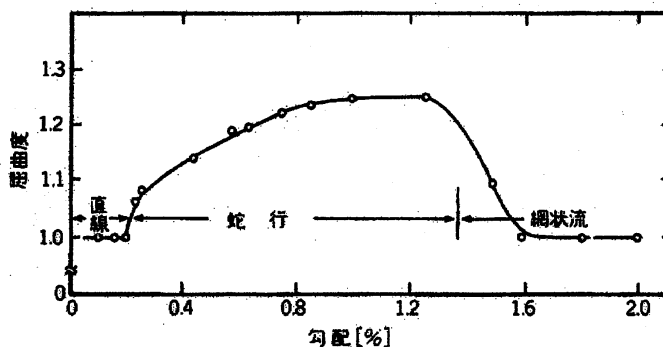


図 3-83 屈曲度と勾配との関係 (Schumm, S. A., Khan, H. R.: *Bull. C. S. A.*, 88: 1755~1770, 1972)

図 7: 傾斜にともなう流路形態の変化 (実測)

傾斜角と屈曲度 (川の始点終点間の距離と流路長との比) 傾斜角の増加にともない屈曲度は 1.0 (直線流) から増加し蛇行流へと変化する。流路が複数ある場合には主流路 (最も流量の大きい流路) によって屈曲度を定義すると、勾配にともない減少を始め網状化する。

図 9 に初期傾斜の増大にともなう形態変化を示す。直線流は $dH/dx \sim 0.008$ で不安定化し蛇行流となり、さらに、傾斜角が増大すると $dH/dx \sim 0.014$ で増大する流量を川岸が維持できなくなり崩壊し、蛇行流が網状化する。これらの量の形態による違いをまとめると以下のようになる。

	直線	蛇行	網状
表面積	小	大	中
平均流量	大	小	中
川幅水深比	大	小	中

直線流／蛇行流の境界ではこれらの量は急激に変化している。これは、川底からの抵抗が水深に逆比例しており、侵食による水深の増大と流速の増加という正のフィードバックによるものである。この急激な流速の増大により直線流が不安定化し蛇行流が定常形態となる。このことは、侵食のダイナミクス $M_f = \beta v$ の係数 β を増大させるとより小さい傾斜角で蛇行流が形成されることから示唆され、侵食 → 水深増 → 流速増 → 侵食増なるフィードバックループが蛇行流の形成において重要と思われる。

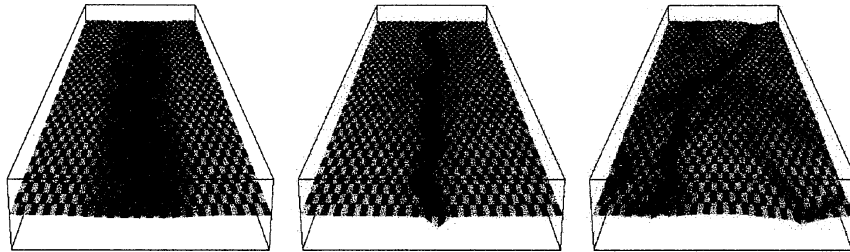


図 8: 傾斜にともなう流路形態の変化

傾斜角の増加にともない川の流路形態は左：直線流、中：蛇行流、右：網状流と変化する。直線流の形態は安定であるが、形態変化のない蛇行流とカオティックに変動する蛇行流がある。網状流は非周期的に流路が変化し、常に流路の形成消滅を繰り返す。

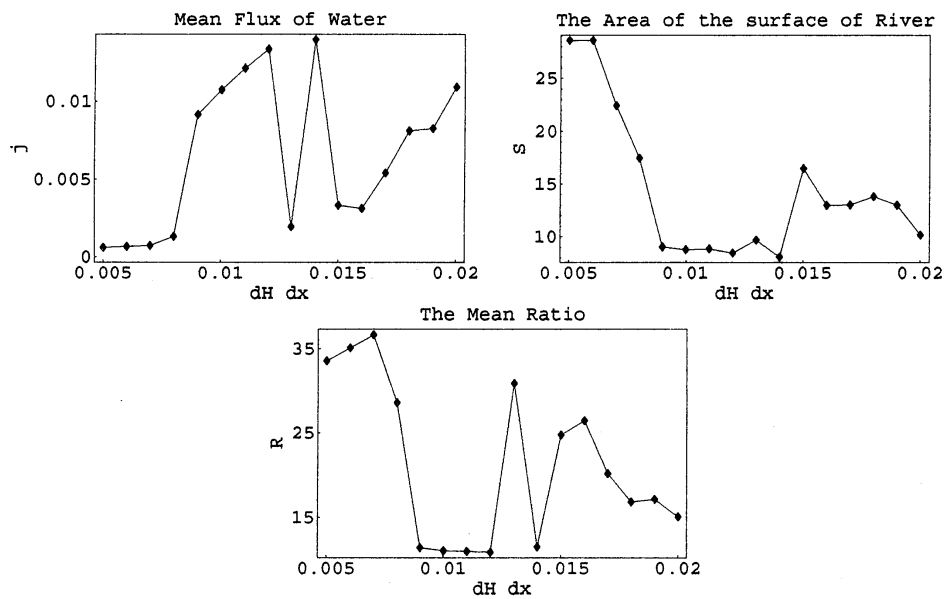


図 9: 形態の特徴

傾斜角の増大にともなう形態変化を流量(上左図)、表面積(上右図)、川幅水深比(下図)によって特徴づけを行った。 $dH/dx \sim 0.008$ で直線流の不安定化が起こり、 $dH/dx \sim 0.014$ で網状化が始まる。

3次元乱流拡散やミクロスケールの渦による拡散のエフェクティブな効果を浮遊土砂の拡散として取り入れているが、この効果が直線／蛇行遷移で重要な役割を担っている。流速一定のもとでは、侵食と堆積がバランスする浮遊土砂量となる。したがって、流線に沿って浮遊土砂量はほぼ一定の値を持つ。そのため、流速の速い河川中心で浮遊土砂量は大きく、同様に川岸で浮遊土砂が少なくなり、拡散により浮遊土砂は河川中心から川岸へと輸送される。それにより川岸では流れにより維持できる浮遊土砂量を越え堆積が起こる。一般に拡散は場を一様にする働きがあるが、この場合には上のプロセスをとおして、拡散が川岸を強化する働きを持つことになる。この拡散効果がないと川幅は時間とともにゆっくりと増大し定常状態とならない。この拡散は直線流は定常的に保ち、河川境界を維持する働きを担っている。

総水量 $\iint h(x, y) dx dy$ を一定とした直線流を初期状態としたシミュレーションを行い、傾斜角にともなう形態変化を主に調べたが、初期総水量を増加させると蛇行流の波長が増大する傾向がある。これら形態変化を力学系の立場からみれば、直線／蛇行／網状流や波長の違いなどはパラメータの変化による形態の変化でなく(もちろん、パラメータを変えても形態は変化するが)、初期条件に違いにより異なるアトラクターに収斂したと見なすことができ、多重アトラクターを持つ系となる。

4 まとめ

1. 川のモデルの提案

河川の多様な流れ形態を持つ、その形態変化の主要因を明らかにするための動力学モデルを提案した。3次元流を鉛直方向に平均化した2次元流で表し、侵食堆積のダイナミクスと流体運動との相互作用を考慮したモデルである。ここで、河川学で重要とされているスパイラル流(3次元乱流運動)は直接的には考慮されていない。

2. 形態変化の再現

流体運動と侵食堆積のダイナミクスにより直線／蛇行／網状という流れ様式の変化をはじめて動力学モデルで統一的に再現した。傾斜角にともなう形態変化は実際の河川でも観測されており、シミュレーションと定性的に一致する。

3. 浮遊土砂の拡散の重要性

- 川岸の堆積を強める。
- 直線流／蛇行遷移をもたらす。

4. パラメータの役割

このモデルのパラメータは多数あるが、そのうちの浮遊土砂の拡散係数、川底の崩落係数を変化させてパターンへの影響を調べた。

	小	$\leftarrow D_H \rightarrow$	大
形態	蛇行	\longleftrightarrow	直線流

	小	$\leftarrow D_m \rightarrow$	大
形態	川幅大	\longleftrightarrow	蛇行

侵食のダイナミクス $M_{\dagger} = \beta v$ の係数 β と形態の関係

	小	$\leftarrow \beta \rightarrow$	大
形態	直線	\longleftrightarrow	蛇行

また、流量と蛇行流の波長との関係は

	小	$\leftarrow \text{流量} \rightarrow$	大
波長	短	\longleftrightarrow	長

5. 比較モデル学

侵食／堆積／浮遊土砂拡散などの効果は現象論的に導入しているため、個々のダイナミクスがモデル全体にいかなる影響を与えるかを調べる必要がある。ここでは、拡散過程を以下のように変化させ、その影響を見た。

$$D_H \nabla \cdot (h \nabla H) \rightarrow D_H \nabla \cdot (v \nabla H) \quad (11)$$

$$D_m \nabla \cdot (h \nabla \frac{m}{h}) \rightarrow D_m \nabla \cdot (v \nabla \frac{m}{h}) \quad (12)$$

その結果、形態遷移する値は多少変化するが、各形態は同じように存在し、拡散ダイナミクスの詳細にはよらない。

参考文献

- [1] A.D.Miall. *Canad.Soc.Petrol.Geol*, 1997.
- [2] S.A.Schumm. Patterns of alluvial rivers. *Ann.Rev.Earth Planet. Sci*, 13:5–27, 1985.
- [3] E.Hansen. The formation of meanders as a stability problem. *Hydraul,Lab.,Tech.Univ.Denmark,Basic Res. Prog.*, (13), 1967.
- [4] R.A.Callander. Instability and river channels. *J.Fluid Mech.*, 36:465–480, 1969.
- [5] G.Parker. On the cause and characteristic scales of meandering and braiding in rivers. *J.Fluid Mech.*, 76:457–480, 1976.
- [6] G.Parker S.Ikeda and K.Sawai. *J.Fluid Mech.*, 112:363, 1981.
- [7] S.F.Edward T.B.Liverpool. Dynamics of a meandering river. *Phys.Rev.Lett.*, 75:3016–3019, 1995.
- [8] C.Paola A.B.Murray. A cellular models of braided rivers. *Nature*, 371:54–57, 1994.
- [9] G.Parker. River meanders in a tray. *Nature*, 395:111, 1998.
- [10] C.E.Smith. Modeling high sinuosity meander in a small flume. *Geomorphology*, 25:19–30, 1998.